

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang Akademik 2000/2001

Februari/Mac 2001

**ZCT 218/4 – Kaedah Matematik**

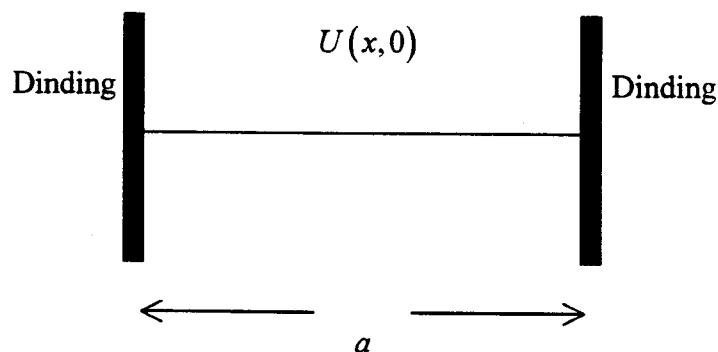
Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua LIMA soalan. Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. Satu tali yang tidak kenyal diregangkan, dan hujung-hujungnya diikat dengan ketat pada dinding. Panjang tali ini ialah  $a$  dan ketumpatan jisim per unit panjangnya ialah  $\sigma$ .

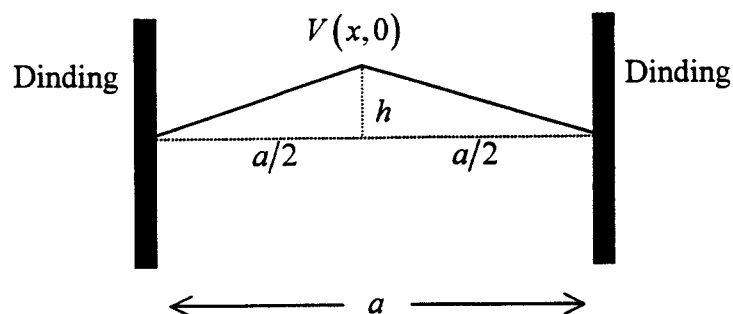
Pada masa  $t = 0$ , keadaan tali adalah lurus dengan ketegangan  $T$  seperti yang ditunjukkan pada Rajah 1.



Rajah 1

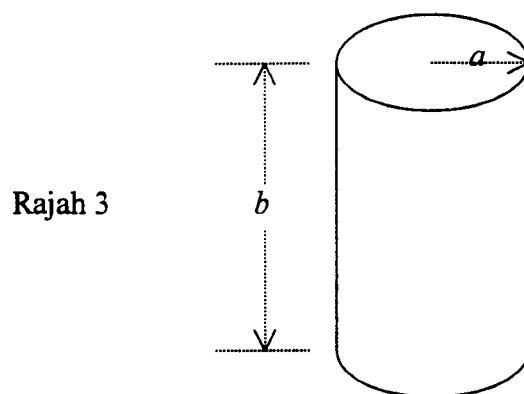
... 2/-

Tetapi halaju melintang pada tali pada  $t = 0$ , iaitu  $V(x, 0) = \left. \frac{dU(x, t)}{dt} \right|_{t=0}$  adalah seperti yang ditunjukkan pada Rajah 2.



Rajah 2

- (a) Tuliskan persamaan gelombang umum bagi sesaran melintang sistem tali yang bergetar,  $U(x, t)$ . (5/100)
  - (b) Dengan kaedah pemisahan pembolehubah, terbitkan penyelesaian am bagi persamaan gelombang di dalam (a). (30/100)
  - (c) Tuliskan syarat-syarat sempadan dan syarat-syarat awal bagi sistem tali yang dihuraikan di atas. (15/100)
  - (d) Dengan jawapan-jawapan di dalam (b) dan (c), cari penyelesaian khusus bagi  $U(x, t)$ . (40/100)
  - (e) Tentukan halaju melintang pada tali ini. (10/100)
2. Diberi satu bar logam berbentuk silinder seperti yang ditunjukkan di dalam Rajah 3. Panjang dan jejari bar logam ini ialah  $b$  dan  $a$  masing-masing. Bahan logam dicirikan oleh pengkonduksian haba  $\Omega$ , haba tentu,  $C$ , dan ketumpatan  $\rho$ .



Rajah 3

... 3/-

Diberi suhu pada kesemua permukaan bar logam ini telah ditetapkan.

- (a) Tuliskan persamaan haba umum bagi perubahan suhu,  $T(\vec{r}, t)$ , di dalam bar logam seperti yang dihuraikan di atas. (10/100)
- (b) Dengan kaedah pemisahan pembolehubah, cari penyelesaian am bagi (a). (30/100)
- (c) Tuliskan syarat-syarat sempadan bagi sistem yang dihuraikan di atas. (10/100)
- (d) Dengan menggunakan jawapan-jawapan di dalam (b) dan (c), selesaikan mod-mod perubahan haba yang mungkin bagi sistem ini. (50/100)

3. Fungsi Gamma,  $\Gamma(z)$ , mempunyai tiga takrifan:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \quad (1)$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (3)$$

Dengan menggunakan satu atau lebih takrifan-takrifan ini,

- (a) Buktikan  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  (20/100)
- (b) Nilaikan  $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$  (20/100)
- (c) Buktikan  $\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$  (30/100)
- (d) Nilaikan kamiran  $I = \int_0^{\infty} x^{2s+1} e^{-ax^2} dx$  (30/100)

$$\left[ \text{Diberi } \sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right) \right]$$

... 4/-

4. (a) (i) Satu gelombang dicirikan oleh  $f(x)$  di dalam julat  $-\pi \leq x \leq \pi$ , yang mana

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad (4)$$

Terbitkan perwakilan siri Fourier bagi  $f(x)$ . (40/100)

- (ii) Lakarkan gelombang di dalam (i) dalam julat  $-3\pi \leq x \leq 3\pi$ . (10/100)

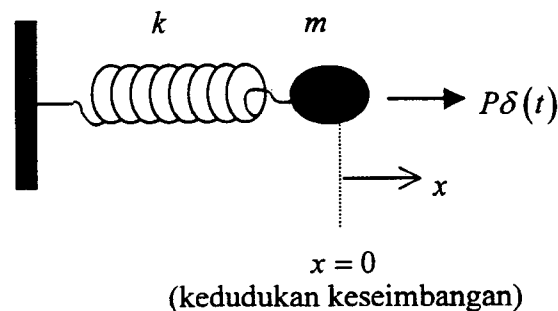
- (b) (i) Satu gelombang dicirikan oleh  $g(x)$  di dalam julat  $-\pi \leq x \leq \pi$ , yang mana

$$g(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad (5)$$

Terbitkan perwakilan siri Fourier untuk  $g(x)$ . (40/100)

- (ii) Lakarkan gelombang di dalam (i) dalam julat  $-3\pi \leq x \leq 3\pi$ . (10/100)

5. Satu spring dengan pemalar spring  $k$  diikat pada dinding dan objek berjirim  $m$  di kedua-dua hujungnya seperti di dalam Rajah 4. Pada masa  $t = 0$ , objek ini adalah pegun dan berada pada kedudukan keseimbangan. Juga pada masa  $t = 0$ , objek ini dikenakan satu daya impuls  $P\delta(t)$ , yang mana  $P$  ialah pemalar. Pelembapan gerakan objek ini adalah bersandar kepada halaju gerakan dan faktor pelembapan  $\gamma$ .



Rajah 4

... 5/-

- (a) Terbitkan persamaan gerakan umum bagi objek ini. (15/100)
- (b) Selesaikan sesaran objek  $x(t)$  berasaskan persamaan di dalam (a) dengan teknik transformasi Laplace bagi tiga kes:
- (i)  $\gamma^2 < 4mk$  (25/100)
- (ii)  $\gamma^2 = 4mk$  (20/100)
- (iii)  $\gamma^2 > 4mk$  (25/100)
- (c) Berikan huraian atau lakaran bagi gerakan objek bagi ketiga-tiga kes di dalam (b). (15/00)

## LAMPIRAN

## Jadual transformasi Laplace

	$f(s)$	$F(t)$
1.	1	$\delta(t)$
2.	$\frac{1}{s}$	1
3.	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n$
4.	$\frac{1}{s-k}$	$e^{kt}$
5.	$\frac{1}{(s-k)^2}$	$te^{kt}$
6.	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$\cosh kt$
7.	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$\sinh kt$
8.	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$\cos kt$
9.	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$\sin kt$
10.	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	$\exp(at)\cos kt$
11.	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$	$\exp(at)\sin kt$